

Algoritmy vedeckotechnických výpočtov III.

Pavel Šťavina, F1 - 373

<http://stavina.dnp.fmph.uniba.sk>

e-mail: stavina@fmph.uniba.sk

posledná modifikácia: 18. marca 2010: 8h 56min

Reprezentácie, interpolácie a fity

Reprezentácia funkcie

- Vo fyzike väčšinou pracujeme so spojitými hodnotami veličín a so spojitými funkciami v obore reálnych čísel.
- Z toho vyplýva problém reprezentácie takýchto hodnôt v počítači, keďže klasický počítač je diskrétny stroj: v zásade pracuje v aritmetike celých čísel a reálne čísla zobrazuje iba približne, ako racionálne zlomky napríklad v dvojkovej sústave.
- Vzniká nám problém reprezentácie reálneho čísla a s tým súvisiace zaokrúhľovacie chyby (túto otázku sme ale diskutovali v jednej z predchádzajúcich prednášok).

- Druhý problém je reprezentácia funkcie. Problém je v tom, že len málo funkcií vieme vyjadriť v analytickom tvare a i v tom prípade len zriedkavejšie používame programy schopné symbolických manipulácií. Väčšinou potrebujeme reprezentovať funkciu jej hodnotami vo vybraných bodoch alebo iným vhodným spôsobom tak, aby sa celá informácia o funkcii dala reprezentovať v počítači pomocou konečného počtu racionálnych čísel.
- Takýto súbor čísel potom predstavuje celú informáciu, ktorú počítač o funkcii má a všetko sa nakoniec musí odvolávať až na ňu.
- Vo fyzike je ešte ďalšia motivácia pre diskkrétne reprezentácie: **experiment**. Experiment totiž spravidla poskytuje tiež len hodnoty v diskrétnych bodoch: sledovaná funkčná závislosť je preto diskkrétne reprezentovaná. Problémy s tým súvisiace sú staršie ako počítače a obvykle sa v knižkách diskutujú osobitne ako problémy interpolácií.

Interpolácia

Presnejší názov toho, čím sa ideme zaoberať, by mal byť

Interpolácie sieťových funkcií.

Ide o funkcie reprezentované v zadaných diskretných bodoch svojimi hodnotami. Úlohou je napísať procedúru, poskytujúcu hodnotu funkcie v ľubovoľnom bode mimo uzlových bodov. Budeme sa zaoberať jednorozmerným prípadom.

Lagrangeova interpolácia

Základná myšlienka je jednoduchá. Každými N bodmi sa dá preložiť polynóm stupňa $(N - 1)$. Rečou matematiky:

Nech $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ je n bodov v rovine ($x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$). Potom tu musí existovať práve jeden polynóm $p(x)$ stupňa maximálne $n - 1$ taký že $y_i = p(x_i)$ pre $i = 1, \dots, n$.

Tento polynóm nájdeme pomocou Lagrangeovho interpolačného vzťahu:

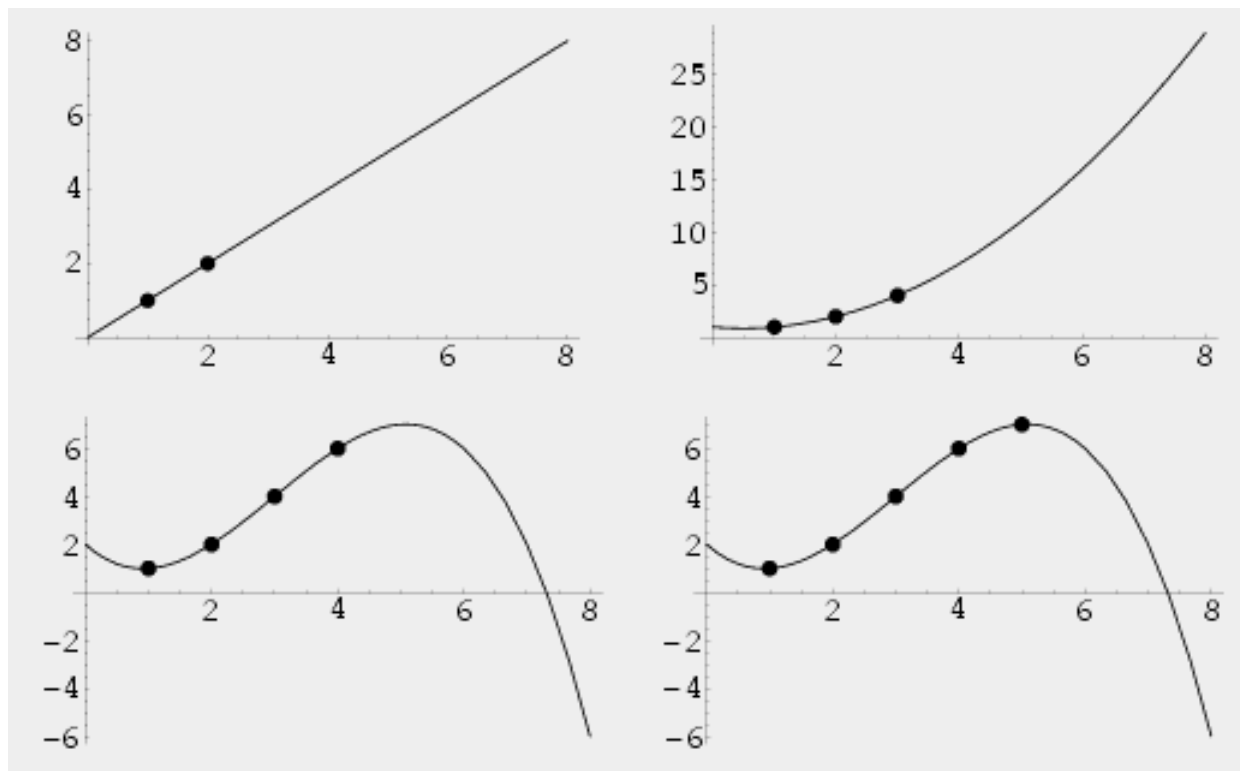
$$p(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)f'(x_1)}y_1 + \frac{f(x)}{(x - x_2)f'(x_2)}y_2 + \cdots + \frac{f(x)}{(x - x_n)f'(x_n)}y_n$$

kde $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

alebo

$$p(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)} \\ + \cdots + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$

Lagrangeova interpolácia



Kubický spline

- Pomerne všeobecná definícia spline hovorí že je to po častiach polynomiálna funkcia stupňa m , ktorá má spojité derivácie až do stupňa p .
- Myslí sa tým, že daný celý interval rozdelíme na podintervaly a na každom z nich aproximujeme (interpolujeme) funkciu polynómom stupňa m , pričom koeficienty tých polynómov volíme tak, aby to ako celok malo spojité derivácie až do stupňa p .

Kubický spline

Ak máme $N + 1$ bodov $\{(x_k, y_k)\}$ pre ktoré platí

$$a = x_0 < \cdots < x_N.$$

potom funkcia $S(x)$ sa nazýva kubický spline ak existuje N kubických polynómov $S_k(x)$ s koeficientami $s_{k,i}$ $0 \leq i \leq 3$ s nasledovnými vlastnosťami

$$1. \ S(x) = S_k(x) = \sum_{i=0}^3 s_{k,i}(x - x_k)^i \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}] \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

$$2. \ S(x_k) = y_k \quad 0 \leq k \leq N$$

$$3. \ S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad 0 \leq k \leq N - 2$$

$$4. \quad S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad 0 \leq k \leq N-2$$

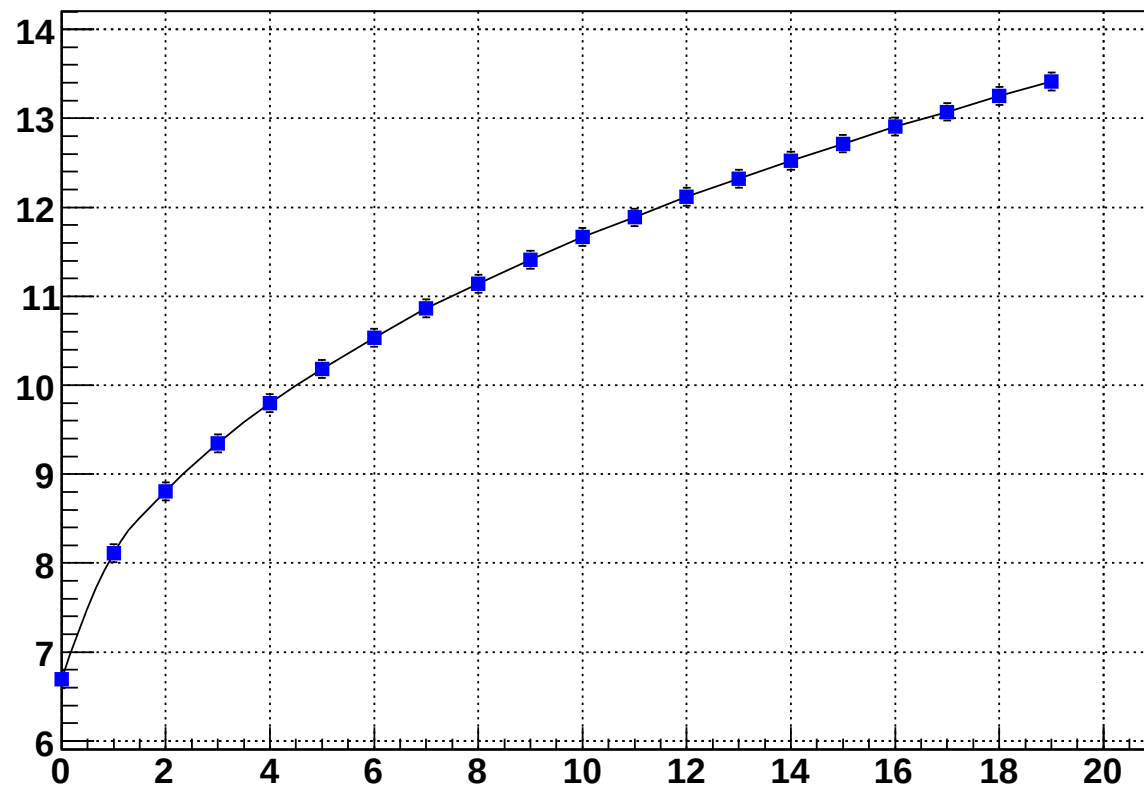
$$5. \quad S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \quad 0 \leq k \leq N-2$$

Body z prvej rovnice sa nazývajú uzlové body.

Kubický spline nám nielenže interpoluje dáta $\{(x_k, y_k)\}$ ale zároveň garantuje aj spojitosť prvej a druhej derivácie. K daným rovniciam je ešte potrebné dodefinovať okrajové podmienky. Jedna z možností je definovať ich ako $S''(a) = 0$ $S''(b) = 0$, čo sa nazýva prirodzený spline. Je možné použiť aj iné okrajové podmienky, čo zneje pomerne triviálne, avšak okolo čoho je možné urobiť aj samostatnú prednášku, ak by sme sa problému chceli zhostiť naozaj dôkladne.

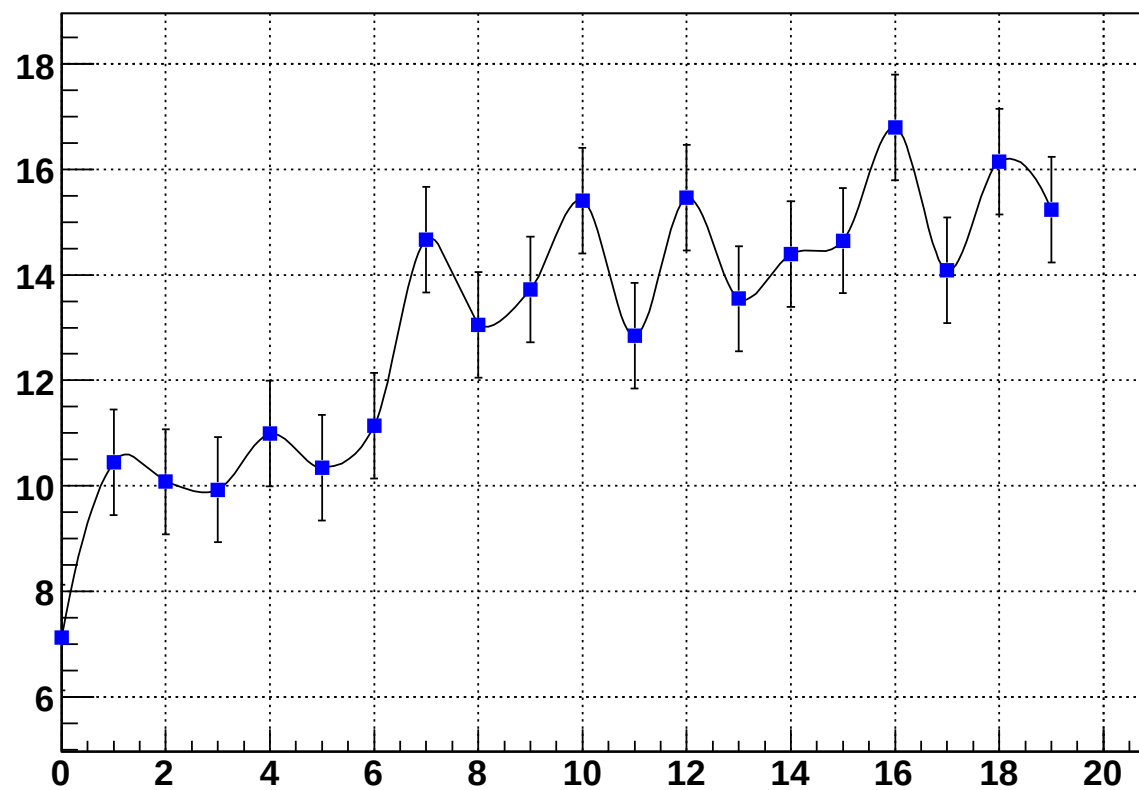
vhodne použitý spline

spline



toto je tiež korektne matematicky spočítaný spline ;-)

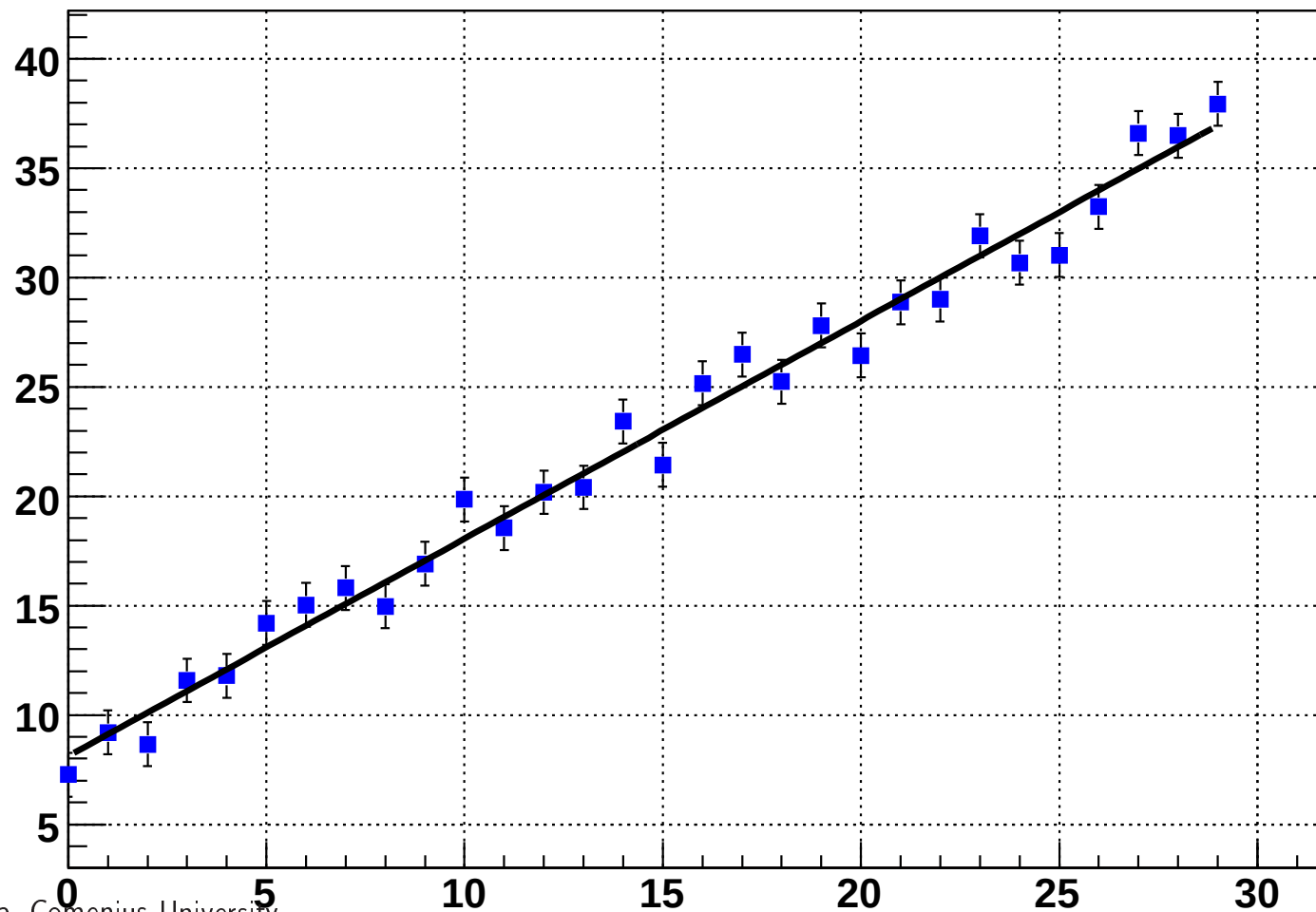
spline



Fit a optimalizácia

- pojem **FIT** (to fit - pasovať, hodiť sa) je pôvodne slangový a znamená "napasovanie" nejakej krivky na dáta, teda nafitovanie dát
- z matematického hľadiska ide o preurčenú úlohu
- typický prípad je ten, že mám dáta (uzlové body) a viem, že teoreticky by pozorovaná závislosť mala mať nejaký tvar
- hľadáme teda konkrétne parametre (vektor parametrov) pre funkciu známeho typu
- dáta, vzhľadom na chyby merania, nebudú striktne ležať na krivke

Příklad lineární funkce



- z uvedeného je jasné, že je možné postupovať vo všeobecnosti nasledovne:
 - definujeme si test, ktorý pre ľubovoľný tvar krivky určí ako kvalitne sú dáta popísané
 - prevedieme úlohu na optimalizačnú, t.j. hľadáme taký vektor (súbor) parametrov funkcie daného typu, aby naše dáta boli (podľa daného testu - samozrejme) optimálne popísané
 - stručne povedané, oceniť navrhnuté riešenie sa dá jednoduchšie, než riešenie priamo nájsť

Čo je to optimalizačná úloha ? Zavedením vhodnej schémy reprezentácie v priestore funkcií (teda zavedením systému zovšeobecnených súradníc) sa úloha nájsť neznámu funkciu, splňajúcu nejaké podmienky transformuje na úlohu nájsť diskretný súbor koeficientov (zovšeobecnených súradníc), ktoré splňajú určité podmienky. Tieto podmienky pre súradnice všeobecne dostaneme, ak podmienky pre pôvodne hľadanú funkciu vyjadríme pre funkciu vyjadrenú pomocou zovšeobecnených súradníc. Máme teda N zovšeobecnených súradníc, ktoré majú splňať nejaké podmienky. Veľmi často sa stáva, že tieto podmienky sú sformulované ako optimalizačná úloha: zadaná je funkcia zovšeobecnených súradníc

$$F(x_1, \dots, x_n)$$

a úlohou je nájsť také hodnoty súradníc $x_1, \dots, x_n$, pre ktoré je príslušná hodnota $F(x_1, \dots, x_n)$ optimálna. Priestor premenných budeme volať tiež konfiguračným priestorom, niekedy priestorom stavov.

Metóda najmenších štvorcov

Predpokladáme, že máme súbor nezávislých N meraní y_i v bodoch x_i pričom chyba je Gaussovsky rozložená a my sa snažíme nájsť taký odhad vektora parametrov α , aby veličina

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y(x_i) - F(x_i; \alpha))^2}{\sigma^2}$$

bola minimálna. α je vektor k parametrov $\alpha_1 - \alpha_k$. Veličina χ^2 je rozdelená podľa rozdelenia χ^2 s $(n - k)$ stupňami voľnosti.

Hodnota χ^2 delená počtom stupňov voľnosti sa nazýva χ^2 na stupeň voľnosti (χ^2/ndf).

- Ak je fit dobrý, hodnota χ^2/ndf je číslo blízke 1, t.j. funkcia popisuje body tak, že bod sa v priemere od funkcie odchyľuje o chybu, s ktorou ho poznáme.
- Ak je hodnota χ^2/ndf oveľa väčšia ako 1, znamená to, že funkcia daného typu nie je schopná nám dobre popísať dáta, alebo že chyby máme nerealisticky malé, prípadne že minimalizačný algoritmus neskonvergoval.
- Ak je χ^2/ndf podstatne menší ako 1 (to sa stáva zriedka), obvyčajne to znamená, že používame funkciu s priveľkým počtom parametrov alebo máme primálo bodov na taký fit.

Lineárny prípad

V lineárnom prípade môžeme nájsť takú funkciu $F(x; \alpha)$, ktorá je lineárnou funkciou α a teda ju môžeme vyjadriť ako

$$F(x; \alpha) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(x)$$

kde $k < N$. Funkcie $f_i(x)$ sú lineárne nezávislé funkcie, kde $i = 1 - k$. V opačnom prípade sa jedná o nelineárny problém.

- Lineárny problém (hľadanie globálneho minima) sa dá riešiť analyticky - výpočtom.
- Najtypickejším príkladom je polynomiálny fit. Najprv si urobíme pre ilustráciu tento výpočet pre priamku

- Máme dáta $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.
- Chceme ich popísať priamkou $y = ax + b$
- našou úlohou je nájsť také koeficienty a, b , aby priamka najlepším možným spôsobom popísala (interpretovala) dáta

Ak pre jednoduchosť predpokladáme, že chyby všetkých dát sú rovnaké, minimalizujeme výraz M , daný ako

$$M(a, b) = \sum_{k=0}^n (ax_k + b - y_k)^2$$

ktorý nadobúda hodnotu v závislosti od parametrov a a b , a ktorý sa dá po úpravách napísať ako

$$M(a, b) = a^2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2ab \cdot \sum_{k=1}^n x_k + nb^2 - 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - 2b \cdot \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2$$

Extrém funkcie M hľadáne pomocou požiadavky na nulové parciálne derivácie:

$$0 = \frac{\partial M(a, b)}{\partial a} = 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2b \cdot \sum_{k=1}^n x_k - 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$0 = \frac{\partial M(a, b)}{\partial b} = 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k + 2nb - 2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k$$

a vyriešením týchto rovníc dostaneme

$$a = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2};$$

čo po dosadení do rovnice priamky $y = ax + b$ dáva výraz

$$y = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \cdot x + \frac{\sum_{k=1}^n y_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}$$

Podobne sa to dá odvodiť pre parabolu, polynóm ľubovoľného stupňa alebo inú lineárnu kombináciu nejakých bazových funkcií. Najkompaktnejšie sa dá riešenie vyjadriť v maticovej notácii.

Predpokladáme, že máme súbor N meraní y_i v bodoch x_i . Hladáme taký odhad vektora parametrov α (ktorých je k), aby bol χ^2 minimálny. Chyby meraní y_i v bodoch x_i sú dané kovariančnou maticou V_y rozmerov $N \times N$. Definujme si maticu H rozmerov $N \times k$, ktorej maticové elementy sú dané ako

$$H_{ij} = f_j(x_i)$$

Pre najvšeobecnejší lineárny prípad, keď veličiny nie sú nezávislé, riešenie tohoto problému je maticovou rovnicou

$$(H^T V_y^{-1} H) \hat{\alpha} = H^T V_y^{-1} y$$

z čoho triviálne pre odhad vyplýva

$$\hat{\alpha} = (H^T V_y^{-1} H)^{-1} H^T V_y^{-1} y = D y$$

Chyby parametrov odhadu sú dané kovariančnou maticou

$$V_{\hat{\alpha}} = D V_y D^T$$

Odhad vektora α pri nelineárnych problémoch sa hľadá väčšinou pomocou numerickej minimalizácie (optimalizácie).

Numerická optimalizácia

- Tzv. kráčacie metódy
- Lokálne a nelokálne metódy
- Metódy Monte-Carlo

Jednorozmerné optimalizácie

Success-failure

Ide o najjednoduchšiu kráčaciu metódu.

- Definujeme si test - tzv. cenová funkcia (dajme tomu metóda najmenších štvorcov).
- V každom okamihu máme zadanú momentálnu polohu, veľkosť a smer (v jednom rozmere to znamená dopredu alebo dozadu) kroku.
- Pokusne spravíme z aktuálnej polohy daný krok a vyčíslime cenovú funkciu v tejto pokusnej polohe.

- Ak je cena nižšia ako v aktuálnej polohe, považujeme to za úspech, akceptujeme pokusnú polohu ako novú aktuálnu polohu a pokračujeme ďalším kolom.
- Ak pokusná poloha znamená vyššiu cenu, považujeme to za neúspech a aktuálnu polohu nemeníme, ale upravíme si krok: vhodne ho skrátime a zmeníme jeho smer na opačný.
- Ak nastanú dva úspechy po sebe, považujeme to za znamenie že môžeme kráčať smelšie v danom smere a vhodne zväčšíme dĺžku kroku.

Metóda paraboly

Typické dokončovacie metódy sú obvykle založené na vhodnej aproximácii minimalizovanej funkcie v okolí lokálneho minima, zväčša na nejakej kvadratickej aproximácii.

- Typickým predstaviteľom je metóda paraboly: Ak približovacia metóda našla tri body $x_1 < x_2 < x_3$, ktorých ceny sú usporiadané ako $f_1 > f_2 < f_3$, potom sme zjavne ohraničili polohu lokálneho minima.
- Cez tri body v takomto usporiadaní sa dá preložiť konvexná parabola.
- Analytickým výpočtom sa z koeficientov tejto kvadratickej interpolácie dá vypočítať poloha vrcholu tejto paraboly a vykoná sa skok rovno do súradnice vrcholu s tým, že hodnota kroku pre ďalšie kráčanie sa podstatne zmenší

Viacrozmerné optimalizácie

Fixné súradnice

Triviálny, hoci nie veľmi nádejný postup spočíva v chápaní viacrozmernej optimalizácie ako opakovanej postupnosti jednorozmerných optimalizácií.

- fixujeme všetky súradnice okrem jednej a v smere tejto súradnicovej osi optimalizujeme ako jednorozmerný problém, kým nenájdeme lokálne jednorozmerné optimum.
- takto nájdenu súradnicu zafixujeme, uvoľníme ďalšiu súradnicu a optimalizujeme pozdĺž nej.
- postupne vystriedame všetky súradnice.

- vrátíme sa znova optimalizovať pozdĺž prvej osi....
- ...a tak stále dokola kým vhodné zastavovacie kritérium optimalizáciu neukončí.

Rotujúce súradnice

Optimalizácia pozdĺž fixných súradnicových osí kráča v konfiguračnom priestore vo všeobecnosti len malými krokmi, pretože ani jedna zo súradnicových osí nemá smer lokálneho gradientu, pozdĺž ktorého by sa dalo optimalizovať najefektívnejšie. Jednorozmerné optimalizácie potom adaptívne nachádzajú pomerne malé hodnoty pre typické veľkosti krokov. Popísaný nedostatok metódy fixných súradníc sčasti odstraňuje metóda rotácie súradníc.

- Začneme ako pri metóde fixných súradníc postupnou optimalizáciou v smere jednotlivých osí.
- Na toto prvé kolo optimalizácie sa dívame ako na jeden veľký krok ktorý nám posluží ako odhad lokálneho smeru gradientu minimalizovanej funkcie.

- Vykonáme vhodnú rotáciu súradnicového systému tak, aby prvá os po rotácii mala rovnaký smer ako vykonaný efektívny krok. Takto dosiahneme, že nasledovné kolo už prebehne tak, že optimalizácia pozdĺž prvej osi bude pravdepodobne dosť efektívna a v tomto smere dokráčame dosť ďaleko.
- Optimalizácie v smeroch kolmých na efektívny krok sú málo účinné, ale treba ich urobiť, aby sa získal dobrý odhad nového efektívneho kroku do ďalšieho kola.

Simplexová metóda

Základná myšlienka (nelineárnej) simplexovej metódy spočíva v tom, že pracujeme s rozsiahlejším objektom ako pri obvyklých kráčacích metódach. Momentálny stav je totiž zadáný nie jedným bodom konfiguračného priestoru ale (v prípade N -dimenzionálneho priestoru) $N + 1$ bodmi ktoré teda tvoria vrcholy najjednoduchšieho N -rozmerného priestorového útvaru simplexu. (V prípade dvojrozmerného priestoru je tým simplexom trojuholník, pri troch rozmeroch je to štvorsten atď.).

- simplexová metóda teda nie je striktne lokálna, spracúva naraz informácie z celej oblasti
- veľkosť simplexu sa adaptívne mení, takže má takú veľkosť, aby vystihol typické lokálne štruktúry vo vyšetrovanej oblasti konfiguračného priestoru

- nelokálnosť simplexu umožňuje približne odhadovať smer efektívneho kroku bez dodatočného prehľadávania do strán
- na začiatku musíme samozrejme zadať štartovaciu konfiguráciu a počiatočný krok (čo je N -rozmerný vektor)
- základný krok v simplexovej metóde predstavuje nahradenie najhoršie oceneného vrcholu nejakým iným bodom tak, aby novovzniknutý simplex bol opäť nedegenerovaný
- nový simplex konštruujeme tak, že nový vrchol hľadáme v smere k lepším vrcholom cez ťažisko
- ak je nový simplex lepší, pokračujeme, kým vhodné zastavovacie kritérium optimalizáciu neukončí.

Gradientné metódy

Myšlienka je obdobná, ako v prípade rotujúcich súradníc

- ako sme videli, pri viacrozmernej minimalizácii je dôležité pri každom efektívnom kroku určiť smer lokálneho gradientu
- niekedy sa to dá urobiť analyticky a potom nemusíme určovať gradient pomocou numerických odhadov a približných metód
- v rámci algoritmu pripravíme okrem procedúry, ktorá vráti na zavolanie hodnotu cenovej funkcie i procedúru, ktorá vráti vektor gradientu cenovej funkcie v danom bode

- metód, ktoré takúto informáciu využívajú je viacero, zahrňame ich pod spoločný názov gradientné metódy.
- V každom kroku máme vytýčený smer pozdĺž ktorého minimalizujeme podobne ako pri jednorozmernej minimalizácii.
- starostlivosť treba opäť venovať adaptívnej voľbe kroku.

Kvadratické metody

Doteraz uvádzané viacrozmerné kráčacie metódy majú podobnú nevýhodu ako ich jednorozmerné ekvivalenty: pomalú konvergenciu v oblasti minima.

- tak ako v jednorozmernom prípade, je výhodné v blízkosti minima vychádzať z vhodnej kvadratickej reprezentácie cenovej funkcie a urýchliť konvergenciu.
- kvadratická aproximácia súčasne dáva možnosť odhadnúť kvalitu minima, často totiž pri minimalizácii nejde len o to nájsť minimum, ale aj určiť, či sa jedná o minimum plytké alebo hlboké a stanoviť tak chyby parametrov
- vo viacrozmernom prípade ešte vystupuje otázka korelačnej analýzy

Metódy Monte Carlo

- Náhodné čísla a ich použitie
- Pseudonáhodné čísla
- Generátory a ich vlastnosti

Náhodné čísla sa používajú napríklad v týchto oblastiach

- kryptografia
- simulácia nejakých procesov
- numerická optimalizácia
- numerické integrovanie

- ošemetnosť pojmu náhodných čísel v počítači si uvedomíme asi hneď na úvod, ak vezmeme do úvahy fakt, že klasický počítač je striktne deterministické zariadenie
- naozaj náhodné čísla nám produkujú iba hardwarové generátory
- pseudonáhodný generátor nám generuje postupnosť čísel, ktoré majú požadované rozdelenie (väčšinou rovnomerné), ale nie sú skutočne náhodné
- každý pseudonáhodný generátor postavený na deterministickom algoritme, má totiž istú periodicitu, s ktorou sa postupnosť opakuje !

Random seed

- pseudonáhodné generátory sa dajú zvyčajne štartovať z určitého miesta generovanej postupnosti, najčastejšie zadáním nejakého integer čísla (*seed*), generátor opakovane naštartovaný z rovnakého seedu presne zopakuje predchádzajúcu sekvenciu pseudonáhodných čísel
- dôležité je používanie seedu do náhodného generátora ak chcem jeden dlhý Monte Carlo run rozdeliť na dva krátke
- po prerušení (prečítam si príslušný manuál aby som vedel ako) je možné naštartovať generátor tak, aby presne nadviazal na predchádzajúcu sekvenciu akoby bez prerušenia
- niektoré generátory neakceptujú ako seed akékoľvek číslo (ak si neprečítam manuál a toto obmedzenie neviem, a môžem naštartovať generátor úplne zle)

Optimalizácia (minimalizácia) metódou Monte Carlo

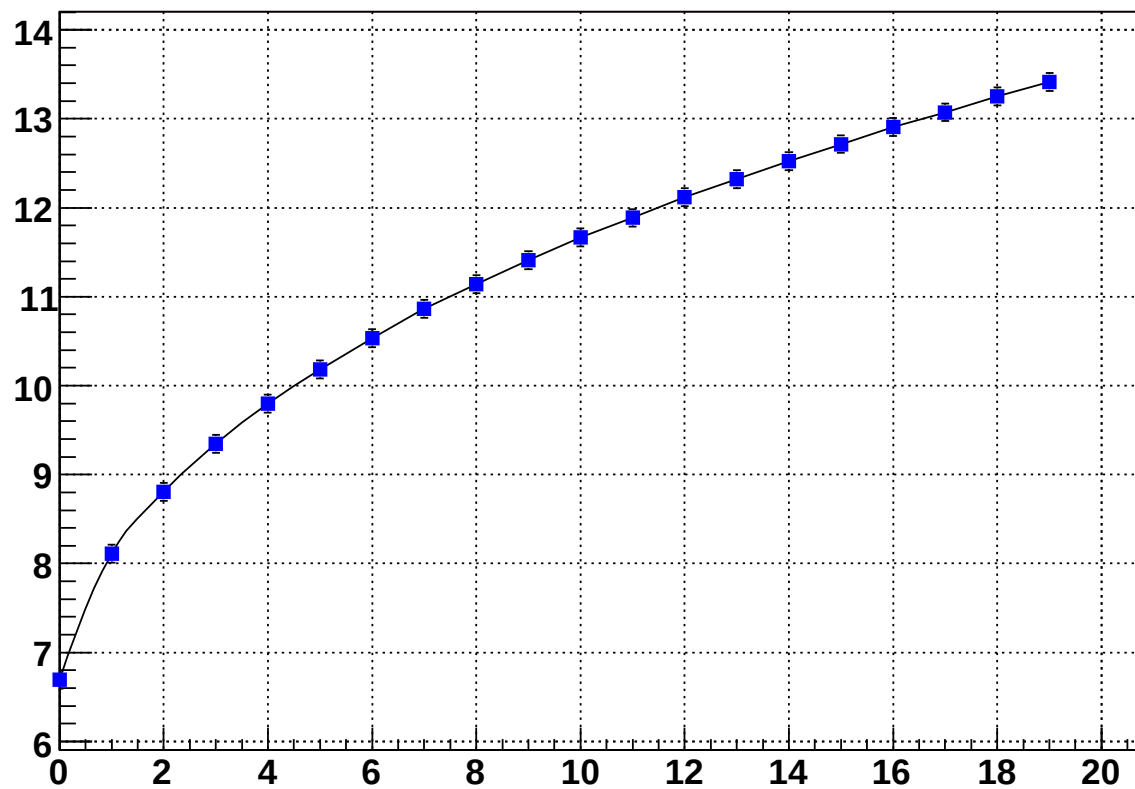
- najjednoduchšou minimalizačnou metódou je tzv. slepé Monte Carlo, ktorá spočíva v postupnom náhodnom a nezávislom generovaní bodov v konfiguračnom priestore, vyčíslení cenovej funkcie v generovanom bode a zapamätaní si doteraz najlepšej náhodne nájdenej hodnoty a bodu v ktorom sa hodnota dosiahla
- Metóda je triviálna na naprogramovanie a pri dostatku strojového času nemusí byť nepoužiteľná
- Takéto slepé Monte Carlo nie je vlastne kráčacou metódou, pretože pri ňom generácia ďalšieho bodu vôbec nezávisí od momentálnej konfigurácie
- ak sa body generujú iba v určitom okolí predpokladaného minima, metóda je už kráčacou metódou s nedeterministickým krokom.

Na záver príklad na zamyslenie

- nie každá štruktúra v dátach zatažených chybami je fyzikálna
- nie vždy ten fit, ktorý vyzerá opticky najlepšie je skutočne najlepší
- opisujme dáta tak jednoducho, ako je to len možné
- pri použití priveľa parametrov je vždy potrebná opatrnosť
- predovšetkým používajme vlastný úsudok a hľadajme v dátach opis reality

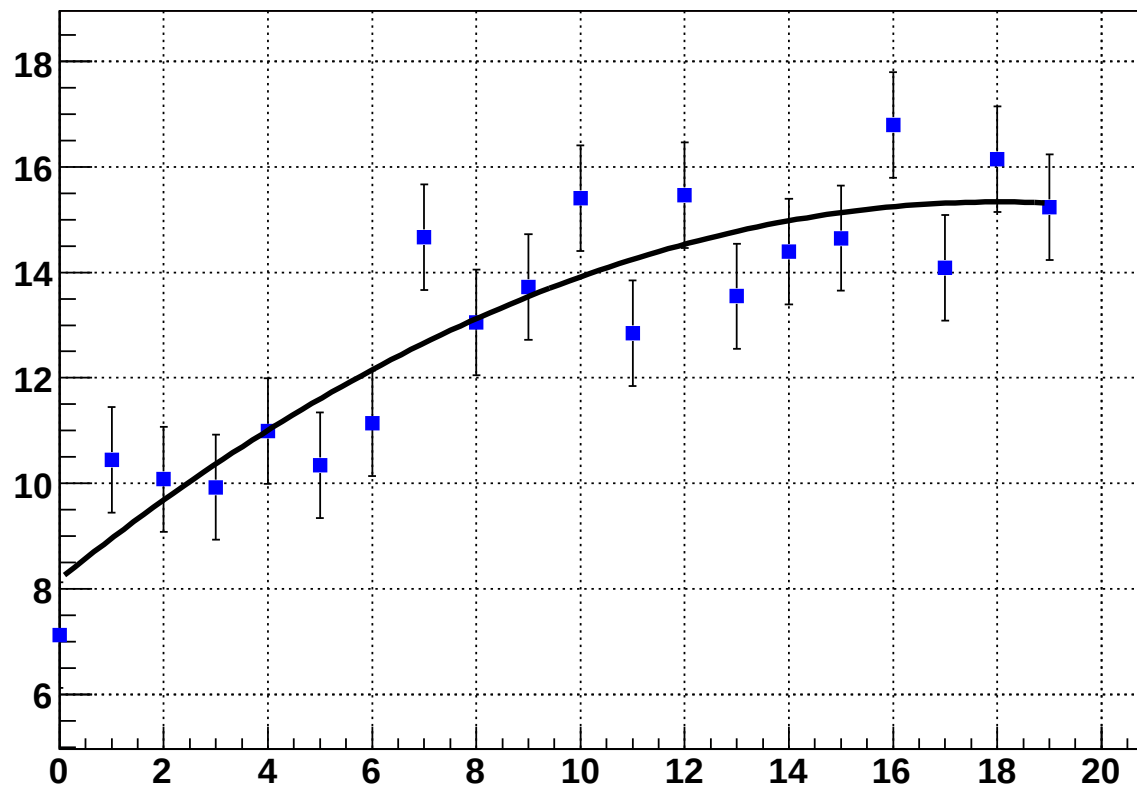
Presne nameraná nejaká neznáma funkcia (body spája spline)

nejaka funkcia reprezentovana bodmi



Tá istá funkcia zatažená veľkými chybami, parabolický fit

nejaka funkcia reprezentovaná bodmi



Do tretice to isté, fit pomocou polynómu vyššieho (deviateho) stupňa

nejaka funkcia reprezentovaná bodmi

